JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 8, 173-188 (1973)

Interpolation mit nichtlinearen Klassen von Spline-Funktionen

ROBERT SCHABACK

Institut für numerische und instrumentelle Mathematik
Universität Münster, 4400 Münster, West Germany

Communicated by Lothar Collatz

DEDICATED TO PROFESSOR I. J. SCHOENBERG
ON THE OCCASION OF HIS 70TH BIRTHDAY

Diese Arbeit behandelt das Interpolationsproblem für allgemeine nichtlineare Klassen von Spline-Funktionen, welche u.a. gewisse exponentielle, trigonometrische und rationale Spline-Funktionen enthalten und Kombinationen dieser Typen zulassen. Die Spline-Interpolierenden werden dabei durch Differenzierbarkeitsforderungen festgelegt und sie sind eindeutig bestimmt. Die Existenz der Interpolierenden wird für den Fall der Interpolation der Werte glatter Funktionen bei kleinen Stützstellenabständen bewiesen; gleichzeitig ergeben sich Aussagen über die numerische Berechnung und das asymptotische Verhalten der Interpolierenden bei kleinen Stützstellenabständen. Für spezielle Klassen wird das Interpolationsproblem auf eine Optimierungsaufgabe zurückgeführt und ohne Voraussetzungen über die Stützstellenabstände gelöst.

1. BEZEICHNUNGEN UND PROBLEMSTELLUNG

Gegeben sei ein Intervall $[a, b] =: I$ der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit einer Zerlegung

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b, \tag{1}$$

und $n + 1$ nicht notwendig paarweise verschiedene Klassen $T_0, \ldots, T_n$ von zweimal stetig differenzierbaren Funktionen f mit offenen Definitionsbereichen D_f in $\mathbb{R}$.

Als $(T_0, \ldots, T_n)$-Spline auf der Zerlegung (1) wird jede Funktion $f \in C^2[a, b]$ bezeichnet, deren Restriktionen $f_j := f \mid [x_j, x_{j+1}]$ für $j = 0, \ldots, n$ die Gestalt

$$f_j(x) = a_j + b_j x + t_j(x) \qquad (x \in [x_j, x_{j+1}]) \tag{2}$$

mit Funktionen $t_j \in T_j \cap C^2[x_j, x_{j+1}]$ haben.

Sind ferner zu einer Zerlegung (1) reelle Zahlen $y_0, \ldots, y_{n+1}$ gegeben, so wird ein $(T_0, \ldots, T_n)$-Spline $f(x)$ auf I interpolierend zu $y_0, \ldots, y_{n+1}$ genannt, wenn

$$f(x_j) = y_j \qquad (0 \leq j \leq n+1) \tag{3}$$

gilt. Zusatzbedingungen der Form

$$\begin{aligned} f'(a) &= a', \\ f'(b) &= b', \end{aligned} \tag{4}$$

bzw.

$$\begin{aligned} f''(a) &= a', \\ f''(b) &= b', \end{aligned} \tag{5}$$

werden als Randbedingungen erster bzw. zweiter Art bezeichnet.

Die Verwendung verschiedener Klassen T_j bei einer festen Zerlegung (1) macht es möglich, für jedes Teilintervall $[x_j, x_{j+1}]$ einer anderen Funktionstyp zu spezifizieren und dadurch die Flexibilität der Interpolation zu erhören.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, für möglichst große Klassen T_j Aussagen über Existenz, Eindeutigkeit und Konstruktionsverfahren für interpolierende $(T_0, \ldots, T_n)$-Splines mit Randbedingungen erster oder zweiter Art zu vorgegebenen Werten $y_0, \ldots, y_{n+1}$, a', b' herzuleiten. Für lineare Klassen der Form

$$T := \{c g_1(x) + d g_2(x) \mid c, d \in \mathbb{R}\}$$

mit festen Funktionen $g_1, g_2 \in C^2[a, b]$ ist dieses Problem im Fall $T_0 = T_1 = \cdots = T_n = T$ innerhalb der bisherigen Literatur unter schwachen Voraussetzungen an g_1 und g_2 behandelt worden [1], [2], [4]. Der Spezialfall

$$T_0 = \cdots = T_n = \left\{ \frac{c}{x - d} \;\middle|\; c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

findet sich in der Dissertation der Verfassers [5], [6]; in [7] ist der Fall

$$T_0 = \cdots = T_n = \{c e^{dx} \mid c, d \in \mathbb{R}\}$$

numerisch angewandt, aber nicht theoretisch untersucht worden.

Um diese Klassen einheitlich in den Griff zu bekommen, wird folgender Begriff eingeführt.

DEFINITION 1. Eine Klasse T von zweimal stetig differenzierbaren Funktionen f auf offenen Teilmengen D_f von $\mathbb{R}$ heißt schwach regulär, wenn für jedes Paar f, g aus T die Funktion $f'' - g''$ auf jedem Teilintervall von $D_f \cap D_g$ höchstens eine Nullstelle hat, sofern $f - g$ nicht identisch verschwindet.

Einige Beispiele schwach regulärer Klassen sind in Tabelle I aufgeführt.

2. Die Eindeutigkeit von $(T_0, \ldots, T_n)$-Spline-Interpolierenden

Satz 1. *Sind die Klassen $T_0, \ldots, T_n$ schwach regulär, so sind $(T_0, \ldots, T_n)$-Spline-Interpolierende bei festen Randbedingungen erster order zweiter Art und festen Vorgaben $y_0, \ldots, y_{n-1}$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Es seien f, g interpolierende Splines. Dann hat $f'' - g''$ in $[a, b]$ mindestens $n + 2$ Nullstellen und wegen der schwachen Regularität der T_j gilt $f = g$ auf einem Teilintervall $[x_j, x_{j+1}]$. Damit kann die Behauptung wie in [6] induktiv bewiesen werden.

3. Reguläre Funktionenklassen

Definition 2. Eine Klasse T von zweimal stetig differenzierbaren Funktionen f auf offenen Teilmengen D_f von $\mathbb{R}$ wird translationsinvariant genannt, wenn für jede Funktion $f \in T$ und jedes $c \in \mathbb{R}$ auch die Funktion

$$f_c(x) := f(x - c)$$

in T liegt. Translationsinvariante schwach reguläre Funktionenklassen werden als regulär bezeichnet.

Für translationsinvariante Funktionenklassen ist das Interpolationsverhalten vom zugrundeliegenden Intervall unabhängig.

Zu jeder schwach regulären Funktionenklasse T gibt es eine Funktion r, so daß für alle $f \in T$ und alle $x \in \mathbb{R}$, $h_0 > 0$ mit $[x, x + h_0] \subset D_f$ die Beziehung

$$r(x, h_0, f''(x + h_0), f''(x), h) = f(x + h)$$

für alle $h \in [0, h_0]$ gilt.

Ist T zusätzlich translationsinvariant, so hat man für jedes $f \in T$, jedes $c \in \mathbb{R}$ und jedes $x \in \mathbb{R}$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} f_c(x + c + h) &= f(x + h) \\ &= r(x, h_0, f''(x + h_0), f''(x), h) \\ &= r(x + c, h_0, f_c''(x + c + h_0), f_c''(x + c), h) \\ &= r(x + c, h_0, f''(x + h_0), f''(x), h), \end{aligned}$$

und es folgt, daß r nicht vom ersten Argument abhängt.

Für reguläre Klassen T ergibt sich dadurch, daß die Größen

$$\frac{1}{h_0}\left(\frac{1}{h_0}(f(x + h_0) - f(x)) - \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h}(f(x + h) - f(x))\right)$$

$$-\frac{1}{h_0}\left(\frac{1}{h_0}(f(x + h_0) - f(x)) - \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h_0 - h}(f(x + h_0) - f(x))\right)$$

nur von $f''(x+h_0)$, $f''(x)$ und h_0 abhängen; mithin existiert eine Funktion $p(y, z, h)$, so daß für alle $f \in T$ und alle $x \in [a, b]$, $h \neq 0$, für die $[x, x+h]$ in D_f liegt, die Beziehungen

$$\frac{1}{h}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right)=p(f''(x+h), f''(x), h) \tag{6}$$

$$-\frac{1}{h}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x+h)\right)=p(f''(x), f''(x+h), -h) \tag{7}$$

gelten. Die Funktion p wird im folgenden als charakteristische Funktion der regulären Klasse T bezeichnet. Die Definition von p ist so angelegt, daß sich in den Beispielen der Tabelle I die Formeln (6) und (7) ohne Fallunterscheidung ergeben.

TABELLE I

Bemerkungen: (1) Für $v = 1$ und $y = z = 0$ beachte man (10). (2) Die Klasse der Funktionen $c \cdot \sin(ux+d)$ läßt sich linear durch $c \cdot \sin ux$ und $c \cdot \cos ux$ erzeugen.

Klasse T $(c, d \in \mathbb{R})$	$p(y, z, h)$ $\left(v := \frac{y}{z}\right)$	Zulässigkeit von (a, b, y, z)
ce^{ux}	$\frac{z}{\log^2 v}(v-1-\log v)$	$\operatorname{sgn} y = \operatorname{sgn} z$
$c(x+d)^u$ $u \in \mathbb{R}$ $u \neq 0, 1, 2$	$\frac{z}{u(u-1)} \frac{v^{u/(u-2)}-1-u(v^{1/(u-2)}-1)}{(v^{(1/u-2)}-1)^2}$	stets, falls $u = 2n+1$, $n \geq 1$ $\operatorname{sgn} y = \operatorname{sgn} z$ sonst
$c\log(x+d)$	$z\frac{v^{1/2}-v+\frac{1}{2}v \cdot \log v}{(1-v^{1/2})^2}$	$\operatorname{sgn} y = \operatorname{sgn} z$
$c\sin(ux+d)$ $u \in \mathbb{R}$ $u \neq 0$	$z\frac{\sin uh - uh \cdot \cos uh}{u^2h^2 \sin uh}+y\frac{uh-\sin uh}{u^2h^2 \sin uh}$	stets

Die spezielle Wahl des Vorzeichens in (7) sichert ferner, daß für jedes $f \in T$ und jedes x aus dem Definitionsbereich D_f von f die Grenzwerte

$$\lim_{h \downarrow 0} p(f''(x+h), f''(x), h) \tag{8}$$

und

$$\lim_{h\downarrow 0} p(f''(x), f''(x-h), -h) \tag{9}$$

existieren und gleich $\frac{1}{2}f''(x)$ sind; man kann also

$$p(f''(x), f''(x), 0) := \tfrac{1}{2}f''(x) \qquad (x \in D_f\,,\, f \in T) \tag{10}$$

setzen.

4. Gleichungen für die Interpolierenden

Es sei f eine $(T_0, ..., T_n)$-Spline-Interpolierende zu den Werten $y_0, ..., y_{n+1}$ auf einer Zerlegung der Form (1); ferner seien $T_0, ..., T_n$ regulär.

Mit $h_j = x_{j+1} - x_j$ bilde man die Differenzenquotienten

$$\Delta_j^1 y := \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} \qquad (0 \leq j \leq n). \tag{11}$$

$$\Delta_j^2 y := \frac{\Delta_j^1 y - \Delta_{j-1}^1 y}{h_j + h_{j-1}} \qquad (1 \leq j \leq n). \tag{12}$$

Aus den Eigenschaften

$$\begin{aligned} f_j(x_j) &= y_j\,, & & \\ f_j(x_{j+1}) &= y_{j+1} & &(0 \leq j \leq n), \\ f_j'(x_{j+1}) &= f_{j+1}'(x_{j+1}) & &(0 \leq j \leq n-1), \\ f_j''(x_{j+1}) &= f_{j+1}''(x_{j+1}) = M_{j+1} & &(0 \leq j \leq n), \end{aligned} \tag{13}$$

schließt man durch elementare Rechnung unter Benutzung der Gleichungen (6) und (7) und der Bezeichnungen in (11)–(13) auf die nichtlinearen Gleichungen

$$(h_j + h_{j-1})\,\Delta_j^2 y = h_{j-1}\,p_{j-1}(M_{j-1}\,, M_j\,, -h_{j-1}) + h_j\,p_j(M_{j+1}\,, M_j\,, h_j) \tag{14}$$

für $j \in \{1, ..., n\}$ in den Größen $M_k = f''(x_k)$. Dabei sei p_j die charakteristische Funktion von T_j.

Aus einer Randbedingung der Form (4) folgen die zusätzlichen Gleichungen

$$\Delta_0^2 y := \frac{\Delta_0^1 y - a'}{h_0} = p_0(M_1\,, M_0\,, h_0), \tag{15}$$

$$\Delta_{n+1}^2 y := \frac{b' - \Delta_n^1 y}{h_n} = p_n(M_n\,, M_{n+1}\,, -h_n). \tag{16}$$

Setzt man $h_{-1} := 0 =: h_{n+1}$, so haben obige Gleichungen ebenfalls die Form (14).

Randbedingungen der Form (5) äußern sich dadurch, daß im System (14) die Größen M_0 und M_{n+1} durch a' und b' fixiert sind. Somit hat man im wesentlichen ein nichtlineares Gleichungssystem (14) zu lösen.

Durch elementare Rechnung bestätigt man ferner, daß die abgeleiteten Gleichungen auch hinreichend sind, wenn man an eine Lösung $(M_0, \ldots, M_{n+1})$ von (14) die folgende Forderung stellt.

DEFINITION 3. Das Quadrupel $(x_j, x_{j+1}, M_j, M_{j+1})$ heißt zulässig für T_j, falls ein $f_j \in T_j$ existiert mit $[x_j, x_{j+1}] \subset D_{f_j}$ und $f_j''(x_j) = M_j$, $f_j''(x_{j+1}) = M_{j+1}$.

Zusammengefaßt erhält man.

SATZ 2. *Für reguläre Klassen $T_0, \ldots, T_n$ ist $f \in C^2[a, b]$ genau dann $(T_0, \ldots, T_n)$-Interpolierende zu den Werten $y_0, \ldots, y_{n+1}$ auf der Zerlegung* (1) *unter den Randbedingungen* (4) *oder* (5), *wenn ein Vektor $(M_0, \ldots, M_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ existiert mit $M_j = f''(x_j)$ und*

(1) $(x_j, x_{j+1}, M_j, M_{j+1}) \in \mathbb{R}^4$ *ist zulässig für T_j $(0 \leq j \leq n)$,*

(2) *es gelten die Gleichungen* (14) *für $j = 1, \ldots, n$,*

(3) *bei Randbedingungen* (4) *gelten* (15) *und* (16),

(4) *bei Randbedingungen* (5) *gilt $M_0 = a'$ und $M_{n+1} = b'$.*

5. GLATTE REGULÄRE FUNKTIONENKLASSEN

Um schärfere Aussagen über die charakteristische Funktion p zu erhalten, hat man erhöhte Differenzierbarkeitsforderungen zu stellen.

DEFINITION 4. Eine reguläre Klasse T wird glatt genannt, wenn gilt

(1) die Elemente f von T sind in ihrem Definitionsbereichen dreimal stetig differenzierbar und $f^{(3)}$ verschwindet in keinem Teilintervall von $\mathbb{R}$ identisch, falls f nicht identisch verschwindet.

(2) die charakteristische Funktion p von T ist in ihrem Definitionsbereich zweimal stetig partiell differenzierbar.

(3) es gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{\partial p(y, z, h)}{\partial h}\bigg|_{(f''(x+h), f''(x), h)} = 0 \tag{17}$$

für alle $f \in T$ und alle $x \in D_f$.

Die in Tabelle I aufgeführten regulären Funktionenklassen sind glatt.

Für alle Elemente f einer glatten regulären Funktionenklasse T und alle x aus dem Definitionsbereich von f erhält man durch Differentiation von (6) und (7) nach h, Division durch $f^{(3)}(x)$ und Grenzübergang $h \to 0$ die Aussagen

$$\begin{aligned} \lim_{h \downarrow 0} \frac{\partial p(y, z, h)}{\partial y}\bigg|_{(f''(x+h), f''(x), h)} &= \frac{1}{6}, \\ \lim_{h \downarrow 0} \frac{\partial p(y, z, h)}{\partial y}\bigg|_{(f''(x), f''(x+h), -h)} &= \frac{1}{6}. \end{aligned} \tag{18}$$

Durch Differentiation von (6) und (7) nach x und Einsetzung von (18) ergibt sich ferner

$$\begin{aligned} \lim_{h \downarrow 0} \frac{\partial p(y, z, h)}{\partial z}\bigg|_{(f''(x+h), f''(x), h)} &= \frac{1}{3}, \\ \lim_{h \downarrow 0} \frac{\partial p(y, z, h)}{\partial z}\bigg|_{(f''(x), f''(x+h), -h)} &= \frac{1}{3}. \end{aligned} \tag{19}$$

Diese vom Punkt x unabhängigen Aussagen werden im folgenden Abschnitt benötigt.

6. $(T_0, \dots, T_n)$-Splines bei kleinen Stützstellenabständen

Um asymptotische Aussagen über $(T_0, \dots, T_n)$-Splines für kleine Stützstellenabstände zu gewinnen, wird im folgenden von einer Funktion $g \in C^2[a, b]$ und einer Zerlegung (1) des Intervalls $[a, b]$ ausgegangen. Durch eine Folge von Zerlegungen

$$a = x_0^k < x_1^k < \cdots < x_{n_k+1}^k = b, \qquad n_k \in \mathbb{N}, \qquad n_k \geqslant n,$$

mit

$$x_{-1}^k := a, \qquad x_{n_k+2}^k = b, \qquad h_j^k := x_{j+1}^k - x_j^k, \qquad -1 \leqslant j \leqslant n_k + 1,$$
$$h_k := \max_{0 \leqslant j \leqslant n_k} h_j^k, \qquad \lim_{k \to \infty} h_k = 0$$

und $\{x_0, \dots, x_{n+1}\} \subset \{x_0^k, \dots, x_{n_k+1}^k\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ wird die Zerlegung (1) verfeinert.

Gefragt ist nach der Existenz von $(T_0^k, \dots, T_{n_k}^k)$-Splines f_k unter den Interpolationsbedingungen

$$f_k(x_j^k) = g(x_j^k) \qquad (0 \leqslant j \leqslant n_k + 1)$$

und den Randbedingungen

$$f_k'(a) = g'(a), \qquad f_k'(b) = g'(b) \tag{20}$$

oder

$$f_k''(a) = g''(a), \qquad f_k''(b) = g''(b) \tag{21}$$

für hinreichend große k, wobei $T_j^k = T_r$ gilt, sobald $[x_j^k, x_{j+1}^k]$ in $[x_r, x_{r+1}]$ liegt und die Klassen $T_0, \dots, T_n$ glatt und regulär sind. Gleichzeitig interessiert das Konvergenzverhalten der Funktionen f_k für $k \to \infty$ und die numerische Berechnung der f_k.

Dazu wird der Konvergenzsatz von Kantorowitsch für das Newton-Verfahren (vgl. u.a. [3]) zur Lösung des Gleichungssystems (14) herangezogen.

Als Startwerte für das Newton-Verfahren bieten sich die aus zweiten Differenzenquotienten abgeleiteten Größen

$$\tilde{M}_j^k := \frac{2}{h_{j-1}^k + h_j^k}\left(\frac{g(x_{j+1}^k) - g(x_j^k)}{h_j^k} - \frac{g(x_j^k) - g(x_{j-1}^k)}{h_{j-1}^k}\right)$$

$$(1 \leq j \leq n_k, \quad k \in \mathbb{N})$$

$$\tilde{M}_0^k := \begin{cases} g''(a) & \text{falls (21) gefordert,} \\ \dfrac{2}{h_0^k}\left(\dfrac{g(x_1^k) - g(x_0^k)}{h_0^k} - g'(a)\right) & \text{falls (20) gefordert,} \end{cases}$$

$$\tilde{M}_{n_k+1}^k := \begin{cases} g''(b) & \text{falls (21) gefordert,} \\ \dfrac{2}{h_{n_k}^k}\left(g'(b) - \dfrac{g(b) - g(x_{n_k}^k)}{h_{n_k}^k}\right) & \text{falls (20) gefordert} \end{cases}$$

an. Definiert man Vektoren $M^k := (M_0^k, \dots, M_{n_k+1}^k) \in \mathbb{R}^{n_k+2}$ und bildet die Funktionen

$$g_j^k(M^k) := \lambda_j^k p_{j-1}^k(M_{j-1}^k, M_j^k, -h_{j-1}^k) + \mu_j^k p_j^k(M_{j+1}^k, M_j^k, h_j^k) - \tfrac{1}{2} D_{j,k}^2 g$$

für $j = 1, \dots, n_k$ mit

$$\lambda_j^k := \frac{h_{j-1}^k}{h_{j-1}^k + h_j^k}, \qquad \mu_j^k := 1 - \lambda_j^k, \qquad D_{j,k}^2 g := \tilde{M}_j^k \tag{22}$$

sowie

$$g_0^k(M^k) := \begin{cases} 0 & \text{falls (21) gefordert,} \\ p_0^k(M_1^k, M_0^k, h_0^k) - \tfrac{1}{2}\tilde{M}_0^k & \text{falls (20) gefordert,} \end{cases}$$

$$g_{n_k+1}^k(M^k) := \begin{cases} 0 & \text{falls (21) gefordert,} \\ p_{n_k}^k(M_{n_k}^k, M_{n_k+1}^k, -h_{n_k}^k) - \tfrac{1}{2}\tilde{M}_{n_k+1}^k & \text{falls (20) gefordert} \end{cases}$$

so hat man das (14) entsprechende nichtlineare Gleichungssystem

$$g_j^k(M^k) = 0 \qquad (0 \leq j \leq n_k + 1) \tag{23}$$

zu lösen.

Um die Durchführbarkeit des Verfahrens zu sichern, ist von der Funktion g und den Klassen $T_0, \ldots, T_n$ folgendes zu verlangen.

DEFINITION 5. Gegeben sei eine Zerlegung (1), eine Funktion $g \in C^2[a, b]$ und glatte reguläre Klassen $T_0, \ldots, T_n$. Dann wird g als $(T_0, \ldots, T_n)$-zulässig bezeichnet, falls für alle $r \in \{0, \ldots, n\}$ eine offene beschränkte Umgebung K_r von $g''([x_r, x_{r+1}])$ und ein $h_0 > 0$ existiert, so daß die charakteristische Funktion p_r von T_r auf der Menge $\bar{K}_r \times \bar{K}_r \times [-h_0, h_0]$ definiert und dort zweimal stetig differenzierbar ist.

Wird g als $(T_0, \ldots, T_n)$-zulässig vorausgesetzt, so sind die $p_j{}^k$ für genügend große k auf Umgebungen der Punkte $(\tilde{M}_j{}^k, \tilde{M}_{j+1}^k, -h_j{}^k)$ und $(\tilde{M}_{j+1}^k, \tilde{M}_j{}^k, h_j{}^k)$ definiert und zweimal stetig differenzierbar und das Newton-Verfahren kann gestartet werden.

Um die Konvergenz des Newton-Verfahrens für genügend große k nachzuweisen, werden zunächst die Größen $g_j{}^k(\tilde{M}^k) = g_j{}^k(\tilde{M}_0{}^k, \ldots, \tilde{M}_{n_k+1}^k)$ untersucht.

Zu gegebenem $\epsilon > 0$ kann man wegen der gleichmäßigen Stetigkeit der p_r auf $\bar{K}_r \times \bar{K}_r \times [-h_0, h_0]$ nach (10) ein $\delta > 0$ angeben, so daß für alle $r \in \{0, \ldots, n\}$ und alle $(y, z, h) \in \bar{K}_r \times \bar{K}_r \times [-h_0, h_0]$ mit $| y - z | < \delta$, $h < \delta$ die Abschätzung

$$| p_r(y, z, h) - \tfrac{1}{2} z | < \epsilon/2$$

gilt. Für alle k mit

$$\max_{0 \leqslant j \leqslant n_k} | \tilde{M}_{j+1}^k - \tilde{M}_j{}^k | < \delta, \qquad h_k < \delta$$

hat man wegen $\lambda_j{}^k + \mu_j{}^k = 1$ die Abschätzungen

$$| g_j{}^k(\tilde{M}^k)| \leqslant \epsilon$$

für $j = 0, \ldots, n_k + 1$. Also gilt

$$\max_{0 \leqslant j \leqslant n_k+1} | g_j{}^k(\tilde{M}^k)| = o(1) \qquad \text{für} \quad k \to \infty.$$

Die Funktionalmatrix $G^k(M) := (\partial g_j{}^k / \partial M_i)_{i,j}$ ist tridiagonal und hat an der Stelle $\tilde{M}^k$ in der $j$ten Zeile die Elemente

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial g_j{}^k}{\partial M_{j-1}}\right|_{\tilde{M}^k} &= \lambda_j{}^k \left.\frac{\partial p_{j-1}(y, z, h)}{\partial y}\right|_{(\tilde{M}_{j-1}^k, \tilde{M}_j{}^k, -h_{j-1}^k)}, \\
\left.\frac{\partial g_j{}^k}{\partial M_j}\right|_{\tilde{M}^k} &= \lambda_j{}^k \left.\frac{\partial p_{j-1}(y, z, h)}{\partial z}\right|_{(\tilde{M}_{j-1}^k, \tilde{M}_j{}^k, -h_{j-1}^k)} \\
&\quad + \mu_j{}^k \left.\frac{\partial p_j(y, z, h)}{\partial z}\right|_{(\tilde{M}_{j+1}^k, \tilde{M}_j{}^k, h_j{}^k)}, \\
\left.\frac{\partial g_j{}^k}{\partial M_{j+1}}\right|_{\tilde{M}^k} &= \mu_j{}^k \left.\frac{\partial p_j(y, z, h)}{\partial y}\right|_{(\tilde{M}_{j+1}^k, \tilde{M}_j{}^k, +h_j{}^k)}
\end{aligned}$$

Also ist wegen der Beschränktheit der partiellen Ableitungen der Funktion p_r auf $\overline{K}_r \times \overline{K}_r \times [-h_0, h_0]$ die Zeilensummennorm der Matrix $G^k(\tilde{M}^k)$ gleichmäßig beschränkt für $k \to \infty$. Auf Grund von (18), (19), und (22) streben die Größen

$$\frac{\partial g_j^k}{\partial M_j}\Big|_{\tilde{M}^k} - \frac{\partial g_j^k}{\partial M_{j-1}}\Big|_{\tilde{M}^k} - \frac{\partial g_j^k}{\partial M_{j+1}}\Big|_{\tilde{M}^k} \qquad (1 \leqslant j \leqslant n_k) \tag{24}$$

gegen den Wert $\frac{1}{6}$. Bei Forderung von (21) kann man die Funktionen g_0^k und $g_{n_k+1}^k$ streichen; bei Forderung von (20) strebt (24) gegen $\frac{1}{6}$ auch für $j = 0$ und für $j = n_k + 1$. Somit ist die zugrundeliegende Funktionalmatrix für $k \to \infty$ diagonaldominant; daraus folgt (vgl. etwa [1, p. 21])

$$\lim_{k \to \infty} \|(G^k)^{-1}(\tilde{M}^k)\| \leqslant 6$$

in der Zeilensummennorm.

Da auch die zweiten Ableitungen der g_j^k bezüglich k gleichmäßig beschränkt sind, ist der Satz von Kantorowitsch anwendbar und es folgt

Satz 3. *Sind die Klassen $T_0, ..., T_n$ glatt und regulär und ist die Funktion g auf* (1) *$(T_0, ..., T_n)$-zulässig, so konvergiert das Newton-Verfahren zur Lösung der Gleichungen* (23) *für genügend große k bei Verwendung des Anfangsvektors $\tilde{M}^k$ gegen eine Lösung $\overline{M}^k$.*

Ferner gilt eine Abschätzung der Form

$$\sup_{0 \leqslant j \leqslant n_k} |\overline{M}_j^k - \tilde{M}_j^k| \to 0 \qquad \textit{für} \quad k \to \infty. \tag{25}$$

Um damit eine Konvergenzaussage formulieren zu können, wird eine schwach reguläre Klasse T zweimal stetig differenzierbarer Funktionen f auf offenen Definitionsbereichen D_f in $\mathbb{R}$ steif genannt, wenn ein $\epsilon > 0$ und ein $K > 0$ existiert, so daß für alle $f \in T$, alle $x \in D_f$ und alle h, δ mit $0 \leqslant \delta \leqslant h \leqslant \epsilon$ und $[x, x + h]$ in D_f die Abschätzung

$$|f''(x + \delta) - f''(x)| \leqslant K\,|f''(x + h) - f''(x)|, \qquad K \geqslant 1 \tag{26}$$

gilt. Ist f'' monoton für alle $f \in T$, so ist T steif mit $K = 1$.

Setzt man zusätzlich voraus, daß die Klassen $T_0, ..., T_n$ steif sind, so erhält man für alle x aus I zunächst

$$|g''(x) - f_k''(x)| \leqslant |g''(x) - \tilde{M}_j^k| + |\overline{M}_j^k - \tilde{M}_j^k| + |\overline{M}_j^k - f_k''(x)| \tag{27}$$

wobei der Index j so gewählt sei, daß x_j^k der größte unterhalb x gelegene Punkt der Zerlegung ist. Da der letzte Term in (27) mit (26) durch $K \cdot |\overline{M}_j^k - M_{j+1}^k|$ bzw. durch

$$K(|\overline{M}_j^k - \tilde{M}_j^k| + |\tilde{M}_j^k - \tilde{M}_{j+1}^k| + |\tilde{M}_{j+1}^k - \overline{M}_{j+1}^k|)$$

majorisiert wird, erhält man unter Verwendung des Stetigkeitsmoduls $\omega(g'', \delta)$ von g'' insgesamt

$$(1/K)\,|g''(x) - f_k''(x)| \leqslant 2\omega(g'', 3h_k) + 3 \sup_{0 \leqslant j \leqslant n_k} |\overline{M}_j^k - \tilde{M}_j^k| \tag{28}$$

und es folgt die gleichmäßige Konvergenz $f_k'' \to g''$ in I. Durch Integration von (28) ergibt sich

SATZ 4. *Sind die Klassen $T_0, \ldots, T_n$ steif und gelten die Voraussetzungen von Satz* 3, *so hat man das Konvergenzverhalten*

$$\| g^{(i)} - f_k^{(i)} \| = o(h_k^{(2-i)}) \qquad i = 0, 1, 2$$

in der Tschebyscheff-Norm.

7. ERZEUGENDE FUNKTIONEN

DEFINITION 6. Gegeben seien eine schwach reguläre Klasse T und eine Funktion $g \in C^2(D_g)$ mit einer offenen Menge $D_g \subset \mathbb{R}$. Ferner sei g'' auf jedem Teilintervall von D_g streng monoton. Mit der Funktion

$$p_g(y, z) = \frac{1}{(g''^{-1}(y) - g''^{-1}(z))^2}\,(g(g''^{-1}(y)) - g(g''^{-1}(z)) - (g''^{-1}(y) - g''^{-1}(z))\,g'(g''^{-1}(z))) \tag{29}$$

für alle y, z aus Teilintervallen von $g''(D_g)$ und $p(y, z, h) := p_g(y, z)$ mögen die Gleichungen (6) und (7) für alle $f \in T$ gelten.

Dann heißt g Erzeugende von T und T wird als von g erzeugt bezeichnet. Ferner werden schwach reguläre Klassen erzeugbar genannt, wenn sie im Sinne dieser Definition eine Erzeugende besitzen.

Bezüglich der Existenz erzeugbarer Klassen verifiziert man elementar den

SATZ 6. *Ist $g \in C^2(D_g)$ eine Funktion gemäß Definition* 6, *so gelten* (6) *und* (7) *für alle Funktionen der Form $f(x) = g(x + d)$ mit $d \in \mathbb{R}$, wobei $p(y, z, h) = p_g(y, z)$ zu setzen ist.*

Hat $p_g(y, z)$ die Eigenschaft

$$p_g(cy, cz) = cp_g(y, z) \tag{30}$$

für alle $y, z, c \in \mathbb{R}$, sofern y, z und cy, cz in je einem Teilintervall von $g''(D_g)$ liegen, so gelten (6) *und* (7) *bei Setzung $p(y, z, h) := p_g(y, z)$ für die Funktionenklassen*

$$\{f \mid f(x) = cg(x - d), \quad c, d \in \mathbb{R}\} \tag{31}$$

und

$$\{f \mid f(x) = g(cx - d), \quad c, d \in \mathbb{R}\}. \tag{32}$$

Ist überdies $g \in C^4(D_g)$ und sind die Klassen (31) bzw. (32) *schwach regulär, so sind* (31) bzw. (32) *reguläre glatte steife von g erzeugte Klassen.*

Für von einer Funktion $g \in C^2(D_g)$ erzeugte schwach reguläre Klassen T_g läßt sich die Bestimmung einer $(T_g, ..., T_g)$-Spline-Interpolierenden auf einer Zerlegung (1) auf ein nichtlineares Optimierungsproblem zurückführen. Mit den Bezeichnungen von Abschnitt 1 bilde man

$$D_j^2 := (h_{j-1} + h_j)\, \Delta_j^2 y \qquad (0 \leq j \leq n + 1)$$

und die Funktion

$$E(Z) := \sum_{i=0}^{n} h_i \frac{g(z_{i+1}) - g(z_i)}{z_{i+1} - z_i} - \sum_{i=0}^{n+1} D_i^2 z_i \tag{33}$$

für Vektoren $Z = (z_0, ..., z_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ aus der Menge

$$D_E := \{Z \in \mathbb{R}^{n+2} \mid z_0, ..., z_{n+1} \text{ aus einem Teilintervall von } D_g\}. \tag{34}$$

Durch Differentiation von E nach den z_j ergibt sich, daß die Gleichungen (14) bzw. (15) und (16) die Gestalt

$$\frac{\partial E}{\partial z_j}\,(g''^{-1}(M_0), ..., g''^{-1}(M_{n+1})) = 0 \qquad (0 \leq j \leq n + 1) \tag{35}$$

haben und somit stationäre Punkte der Funktion E zu Lösungen des Interpolationsproblems führen und umgekehrt.

Zusammengefaßt erhält man.

Satz 7. *Es sei T_g eine von einer Funktion $g \in C^2(D_g)$ erzeugte schwach reguläre Klasse. Dann gilt: Die Funktion $f \in C^2[a, b]$ ist genau dann eine $(T_g, ..., T_g)$-Spline-Interpolierende zu den Werten $y_0, ..., y_{n+1}, a', b'$ auf* (1) *unter* *den Randbedingungen* (4) *order* (5), *wenn ein Vektor* $Z = (z_0, \ldots, z_{n+1}) \in D_E$ *existiert mit*

(1) $(x_j, x_{j+1}, g''(z_j), g''(z_{j+1}))$ *ist zulässig für* T_a *für* $0 \leqslant j \leqslant n$,

(2) Z *ist stationärer Punkt von* E, *wobei die Argumente* z_0 *und* z_{n+1},

(a) *bei Forderung von* (4) *frei variabel sind und*

(b) *bei Forderung von* (5) *durch* $g''^{-1}(a')$ *und* $g''^{-1}(b')$ *fixiert sind.*

Auf Grund von Satz 7 liegt es nahe, für spezielle Klassen T_a die Funktion E auf Maxima bzw. Minima zu untersuchen. Ist die Existenz eines Maximums bzw. Minimums auf D_E gesichert, so kann die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (3) durch Maximierung bzw. Minimierung von E mit Hilfe einer der bekannten Methoden durchgeführt werden. Da nach Satz 1 keine weiteren stationären Punkte existieren, treten bei der numerischen Durchführung solcher Verfahren keine wesentlichen Schwierigkeiten auf.

8. Spezielle Funktionenklassen

Für gewisse erzeugende Funktionen $g(z)$ wird im folgenden die Funktion $E(Z)$ auf Minima bzw. Maxima untersucht. Dies geschieht dadurch, daß die Beschränktheit der Mengen

$$K_c := \{Z \in D_E \mid E(Z) \leqslant c\} \qquad \text{und} \qquad K_c^- := \{Z \in D_E \mid E(Z) \geqslant -c\} \tag{36}$$

für $c > 0$ nachgewiesen wird.

Beispiel 1. $g(z) = z^{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, $D_a = \mathbb{R}$. Mit

$$\underline{h} = \min_{0 \leqslant j \leqslant n} h_j \tag{37}$$

folgt für alle $Z \in K_c$ und alle $j \in \{0, \ldots, n\}$ die Abschätzung

$$c \geqslant E(Z) \geqslant \underline{h} \frac{g(z_{j+1}) - g(z_j)}{z_{j+1} - z_j} - \sum_{i=0}^{n+1} D_i^2 z_i . \tag{38}$$

Da die Ungleichung

$$\frac{a^{2k+1} - b^{2k+1}}{a - b} \geqslant a^{2k} \qquad \text{für alle} \qquad a \neq b \in \mathbb{R}$$

elementar verifiziert werden kann, ergibt sich

$$\underline{h}(\| Z \|)^{2k} \leqslant c + \sum_{i=0}^{n+1} D_i^2 z_i$$

und die Beschränktheit von K_c ist bewiesen.

Für die folgenden Funktionenklassen ist die Zulässigkeit der Quadrupel $(x_j, x_{j+1}, M_j, M_{j+1})$ einer Lösung $M = (M_0, \ldots, M_{n+1})$ von (14) äquivalent zu

$$\operatorname{sgn} M_0 = \cdots = \operatorname{sgn} M_{n+1}. \tag{39}$$

Daher müssen alle D_j^2 mit gleichem Signum vorgegeben werden und man hat E auf der Menge der $Z \in \mathbb{R}^{n+2}$ mit $\operatorname{sgn} g''(z_i) = \operatorname{sgn} D_j^2$ für alle $i, j \in \{0, \ldots, n+1\}$ zu untersuchen. Deshalb wird $D_j^2 > 0$ für $j = 0, \ldots, n+1$ im folgenden vorausgesetzt.

BEISPIEL 2. $g(z) = e^z$, $D_g = \mathbb{R}$ oder $g(z) = z^u$, $D_g = \mathbb{R}_{\geq 0} := \{z \in \mathbb{R}, z \geq 0\}$, $u > 2$.
Mit den Bezeichnungen

$$\underline{D} := \min_{0 \leq j \leq n+1} D_j^2, \qquad \bar{D} := \sum_{j=0}^{n+1} D_j^2,$$

$$\bar{z} := \max_{0 \leq j \leq n+1} z_j, \qquad \underline{z} := \min_{0 \leq j \leq n+1} z_j$$

folgt für alle $Z \in K_c$ aus (33) analog zu (38)

$$c \geq \underline{h} \frac{g(\bar{z}) - g(z')}{\bar{z} - z'} - \bar{D}\bar{z}, \tag{40}$$

wenn man $\bar{z} > 0$ annimmt und $z' := \min(0, \underline{z})$ setzt. Aus (40) ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} \underline{h}g(\bar{z}) &\leq (c + \bar{D}\bar{z})(\bar{z} - z') + \underline{h}g(z') \\ &\leq (c + \bar{D}\bar{z})(\bar{z} + |\underline{z}|) + \underline{h}. \end{aligned}$$

Da aus (33) im Falle $\underline{z} < 0$ auch

$$c \geq -\underline{D}\underline{z} - (\bar{D} - \underline{D})\,\bar{z}$$

folgt, hat man

$$\underline{D}\,|\underline{z}| \leq c + (\bar{D} - \underline{D})\,\bar{z}. \tag{41}$$

Damit erhält man

$$\underline{h}g(\bar{z}) \leq c_1 + c_2\bar{z} + c_3\bar{z}^2 \qquad \text{mit} \quad c_1, c_2, c_3 > 0$$

und es ergibt sich die Beschränktheit von $\bar{z}$. Auf Grund von (41) ist auch $|\underline{z}|$ beschränkt.

BEISPIEL 3. $g(z) = z^u$, $1 < u < 2$, $z \geqslant 0$. Aus (33) folgt für alle $Z \in K_c^-$ wegen der Monotonie der Differenzenquotienten

$$\underline{D}\bar{z} \leqslant c + (b - a)\, u\bar{z}^{(u-1)},$$

woraus die Beschränktheit von K_c^- folgt.

Aus Satz 6 ergibt sich, daß alle Funktionen der Form $cg(z + d)$ bzw. $g(cz + d)$ mit $c, d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ aus schwach regulären Klassen (31) bzw. (32) die betreffenden Klassen erzeugen. Daher kann man sich bei der Untersuchung der Funktion E jeweils einen geeigneten Vertreter dieser Klassen heraussuchen. Da allerdings schon die Vereinbarung $D_i^2 > 0$ getroffen wurde, hat man wegen der Zulässigkeitsforderung in Satz 7 darauf zu achten, daß g und D_g so gewählt sind, daß $g''(z) > 0$ auf D_g gilt.

BEISPIEL 4.

(a) $g(z) = (-z)^u$, $u < 0$, $z < 0$ oder

(b) $g(z) = -\log(-z)$, $z < 0$ oder

(c) $g(z) = -(-z)^u$, $0 < u < 1$, $z < 0$.

Die Negativität der z_j für $Z \in K_c$ liefert nach (38)

$$c \geqslant \underline{D}\,|\,\underline{z}\,|.$$

Für die $g(z)$ mit Singularitäten im Nullpunkt hat man noch $\bar{z}$ mit (38) abzuschätzen:

$$c \geqslant \underline{h}\,\frac{g(\bar{z}) - g(-1)}{\bar{z} + 1} \geqslant \underline{h}\,\frac{g(\bar{z}) - g(-1)}{1},$$

wenn man ohne Einschränkung $0 > \bar{z} > -1$ annimmt. Damit folgt

$$g(\bar{z}) \leqslant g(-1) + \frac{c}{\underline{h}}$$

und man hat in den Fällen (a) und (b) eine Einschließung der Form

$$-(1/\epsilon) < z_j < -\epsilon < 0$$

für alle $Z = (z_0, \ldots, z_{n+1}) \in K_c$.

Insgesamt sind also eine Reihe nichtlinearer Spline-Interpolationsprobleme nach Zurückführung auf eine Optimierungsaufgabe durch Minimierungsverfahren eindeutig lösbar.

LITERATUR

1. J. H. AHLBERG, E. N. NILSON, AND J. L. WALSH, "The Theory of Splines and Their Applications," Academic Press, New York, 1967.
2. T. N. E. GREVILLE, "Theory and Applications of Spline Functions," Academic Press, New York/London, 1969.
3. P. HENRICI, "Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations," J. Wiley, New York/London, 1962.
4. J. W. JEROME AND L. L. SCHUMAKER, On Lg-Splines, *J. Approximation Theory* **2** (1969), 29–49.
5. R. SCHABACK, Spezielle rationale Splinefunktionen, Dissertation, Münster, 1969.
6. R. SCHABACK, Spezielle rationale Splinefunktionen, *J. Approximation Theory*. **7** (1973), 281–292.
7. H. SPÄTH, Exponential Spline Interpolation, *Computing* **4** (1969), 225–233.

Printed in Belgium